MADMATH

https://madmath.co/

https://wa.me/+573002002583

Repaso ecuaciones en diferencias finitas

1. Ecuación de segundo orden homogénea

La forma general de la ecuación homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es:

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0 \tag{1}$$

Se conoce que la solución de esta ecuación debe ser de la siguiente forma

$$x_t^h = m^t, \qquad m \neq 0$$

El superíndice h se utiliza para indicar que se trata de la solución de la ecuación homogénea. Según la bibliografía la constante m puede ser cambiada por λ (lambda). Cuando evaluamos en los periodos $t+1$ y $t+2$ obtenemos

$$\begin{aligned} x_{t+1}^h &= m^{t+1} = m \cdot m^t \\ x_{t+2}^h &= m^{t+2} = m^2 \cdot m^t \end{aligned}$$

Cuando reemplazamos en la ec.(1) obtenemos

$$\begin{aligned} x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t &= m^2 \cdot m^t + a \cdot m \cdot m^t + b \cdot m^t \\ &= m^t \left(m^2 + am + b\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Debido a que $m^t \neq 0$ lo que debe ser igual a 0 es la expresión que se encuentra en el paréntesis (polinomio característico)

$$m^2 + am + b = 0 \tag{2}$$

Recordando la fórmula cuadrática, la solución de la ec.(2), estaría dada por

$$m = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \tag{3}$$

donde el discriminante estaría dado por $a^2 - 4b$ y dependiendo de este valor la ec.(2) tiene tres resultados posibles.

1.1. Raíces reales no repetidas

Se obtiene cuando $a^2-4b>0$, en este caso la ec.(2) tiene dos soluciones m_1 y m_2 con las siguientes características

$$m_1, m_2 \in \mathbb{R}$$
$$m_1 \neq m_2$$

La solución correspondiente a la ec.(1) es:

$$x_t^h = c_1 \cdot m_1^t + c_2 \cdot m_2^t$$

1.1.1. Ejemplo 1

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} + 5x_{t+1} + 6x_t = 0$$

Solución
Lo primero que debemos hacer es encontrar el polinomio característico e igualarlo a 0

$$m^2 + 5m + 6 = 0$$

Esta ecuación puede ser resuelta fácilmente por factorización

$$(m+3)(m+2) = 0$$

Así $m_1 = -3$ y $m_2 = -2$, por lo tanto la solución es

$$x_t^h = c_1 \cdot (-3)^t + c_2 \cdot (-2)^t$$

1.1.2. Ejemplo 2

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 4x_t = 0$$

Solución
En esta ecuación vemos que no aparece el término correspondiente a x_{t+1} por lo tanto $b = 0$. El polinomio característico correspondiente igualado a 0, es

$$m^2 - 4 = 0$$

Nuevamente podemos resolver mediante factorización

$$(m+2)(m-2) = 0$$
$$m_1 = -2, m_2 = 2$$

La solución de la ecuación es

$$x_t^h = c_1 \cdot (-2)^t + c_2 \cdot (2)^t$$

1.1.3. Ejemplo 3

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} + 2x_{t+1} - 3 = 0$$

Solución
El polinomio característico igualado a 0, es

$$m^2 + 2m - 3 = 0$$

Resolvemos nuevamente mediante factorización

$$
\begin{aligned}
(m+3)(m-1) &= 0 \\
m_1 = -3, m_2 &= 1
\end{aligned}
$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$x_t = c_1 \cdot (-3)^t + c_2 \cdot (1)^t$$

Recordando que las potencias de 1 son iguales a 1, podemos usar $1^t = 1$ y reescribir nuestra solución como

$$x_t = c_1 \cdot (-3)^t + c_2$$

1.1.4. Ejemplo 4

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} + 2x_{t+1} - 1 = 0$$

Solución
El polinomio característico igualado a 0, es

$$m^2 + 2m - 1 = 0$$

En este caso no podemos hacer la factorización de forma rápida debido a que no encontramos dos números enteros que sumados den como resultado 2 y multiplicados -1. Por lo tanto recurrimos a la ec.(3) y obtenemos

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 \cdot 2}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{2(-1 \pm \sqrt{2})}{2} \\
&= -1 \pm \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
m_1 &= -1 + \sqrt{2} \\
m_2 &= -1 - \sqrt{2},
\end{aligned}
$$

y la solución de la ecuación homogénea sería

$$x_t^h = c_1(-1 + \sqrt{2})^t + c_2(-1 - \sqrt{2})^t$$

1.2. Raíces reales repetidas

Se obtiene cuando $a^2 - 4b = 0$, en este caso la ec.(2) tiene una solución $m_1 = m_2 = m$ con $m \in \mathbb{R}$. La solución correspondiente a la ec.(1) es

$$x_t^h = c_1 \cdot m^t + c_2 \cdot t \cdot m^t$$

1.2.1. Ejemplo 1

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} + 4 = 0$$

Solución
El polinomio característico igualado a 0, es

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

Podemos resolver mediante factorización

$$\begin{aligned}(m-2)(m-2) &= 0\\ m_1 = m_2 = m &= 2\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución homogénea es

$$x_t^h = c_1 \cdot 2^t + c_2 \cdot t \cdot 2^t$$

1.2.2. Ejemplo 2

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + 1 = 0$$

Solución
El polinomio característico igualado a 0, es

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

Podemos resolver mediante factorización

$$\begin{aligned}(m-1)(m-1) &= 0\\ m_1 = m_2 = m &= 1\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución homogénea es

$$\begin{aligned}x_t^h &= c_1 \cdot 1^t + c_2 \cdot t \cdot 1^t\\ &= c_1 + c_2 \cdot t\end{aligned}$$

En la última simplificación se utilizó nuevamente $1^t = 1$.

1.3. Raíces complejas

Llegamos a este caso cuando $a^2 - 4b < 0$, aquí debemos recordar la definición de la unidad imaginaria $i^2 = 1$. Los valores de m los encontraremos a partir de

$$\begin{aligned}m &= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\\ &= -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} i\\ &= \alpha \pm \beta i\end{aligned}$$

En este caso $m \in \mathbb{C}$, donde α y β representan las partes real e imaginaria respectivamente. A partir de α y β podemos calcular el módulo (r) y el argumento (θ) de m:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\\ \theta &= \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

En algunos casos el valor de θ puede ser calculado fácilmente (recordar ángulos notables), pero generalmente no podremos encontrar dicho resultado sin la ayuda de una calculadora. Con estos resultados podemos escribir la solución, la cual es de la forma

$$x_t^h = r^t \left[c_1 \cdot \sin(\theta t) + c_2 \cdot \cos(\theta t)\right] \tag{4}$$

1.3.1. Ejemplo 1

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} + 13 = 0$$

Solución
El polinomio característico igualado a 0, es

$$m^2 - 4m + 13 = 0$$

Utilizamos la fórmula cuadrática para calcular los valores de m

$$\begin{aligned} m &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 13}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{36}i}{2} \\ &= \frac{4 \pm 6i}{2} \\ &= 2 \pm 3i, \end{aligned}$$

por lo tanto $\alpha = 2$ y $\beta = 3$, con esto podemos calcular

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Ahora escribimos la solución en la forma de la ec.(4)

$$x_t^h = \left(\sqrt{13}\right)^t \left[c_1 \cdot \sin\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\theta\right) + c_2 \cdot \cos\left(\arctan\left(\frac{3}{2}\right)\theta\right)\right]$$

2. Ecuación de segundo orden no homogénea

En este caso la ec.(1) no está igualada a 0 sino a una función de t, $f(t) \neq 0$. Es decir

$$x_{t+2} + ax_{t+1} + x_t = f(t) \tag{5}$$

A pesar de que la función $f(t)$ puede ser cualquier función de t, solamente vamos a tratar los casos en los que la función tiene forma de polinomio, exponencial, seno o coseno; también puede ser suma o producto de cualquiera de las opciones mencionadas. El procedimiento para resolver la ec.(5) es el siguiente:

- Solucionar la ecuación homogénea
- Proponer la solución particular x_t^p que depende de la forma de $f(t)$.
- Evaluar x_{t+1}^p y x_{t+2}^p y reemplazar en la ec.(5).

- Agrupar los términos semejantes para encontrar los coeficientes indeterminados.
- La solución general es la suma de las soluciones homogénea y particular.
- En el caso de tener condiciones iniciales, encontrar los valores de las constantes c_1 y c_2.

A continuación se presentan algunos ejemplos de la forma que debe tomar la solución particular, cuando $f(t)$ no tiene la forma funcional de las soluciones de la parte homogénea

$f(t)$	x_t^p
1 (cualquier constante)	A
$3t^2$	$At^2 + Bt + C$
$8t^4 + 2$	$At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E$
2^t	$A \cdot 2^t$
$5 \cdot 4^t$	$A \cdot 4^t$
$2\sin(3t)$	$A\sin(3t) + B\cos(3t)$
$5\cos(5t)$	$A\sin(5t) + B\cos(5t)$
$5t + 3(2)^t$	$At + B + C(2)^t$
$3t^2 + 5\cos(2t)$	$At^2 + Bt + C + D\sin(2t) + E\cos(2t)$

2.1. $f(t)$ Polinomio

Cuando $f(t)$ tiene forma de polinomio la solución particular debe tener la forma de un polinomio del mismo grado de $f(t)$ y dicho polinomio debe estar completo, por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2t^3 + 4 \\ x_t^p &= At^3 + Bt^2 + Ct + D \end{aligned}$$

Vemos que a pesar de que en $f(t)$ no tenemos términos con t^2 ni t, estos deben ser tenidos en cuenta en la solución particular.

2.1.1. Ejemplo 1

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} + 5x_{t+1} + 6x_t = 2t \tag{6}$$

Solución

En la sec(1.1.1) encontramos la solución para la ecuación homogénea $x_{t+2} + 5x_{t+1} + 6x_t = 0$, cuya solución fue $x_t^h = c_1 \cdot (-3)^t + c_2 \cdot (-2)^t$. Ahora procedemos a hallar la solución particular, debido a que $f(t) = 2t$ es un polinomio de grado 1 la solución particular también debe serlo, es decir

$$x_t^p = At + B.$$

Ahora evaluamos en $t + 1$ y $t + 2$

$$\begin{aligned} x_{t+1}^p &= A(t+1) + B \\ &= At + A + B \\ x_{t+2}^p &= A(t+2) + B \\ &= At + 2A + B \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos en la ec.(6), expandimos, simplificamos y agrupamos términos semejantes

$$\begin{aligned} At + 2A + B + 5(At + A + B) + 6(At + B) &= 2t \\ At + 2A + B + 5At + 5A + 5B + 6At + 6B &= 2t \\ 12At + 7A + 12B &= 2t \end{aligned}$$

Para que la anterior ecuación sea válida se requiere que $12A = 2$ (corresponden a los coeficientes de t a los dos lados de la ecuación) y $7A + 12B = 0$ (coeficientes de t^0). En el caso de los polinomios se suele hacer la igualación desde la potencia mayor hacia la potencia menor. Ahora vamos a encontrar los valores de A y B a partir de los anteriores resultados

$$\begin{aligned}
12A =& 2\\
A =& \frac{1}{6}\\
7A + 12B =& 0\\
B =& -\frac{7}{12}A\\
=& -\frac{7}{12}\frac{1}{6}\\
=& -\frac{7}{72}
\end{aligned}$$

La solución particular es

$$\begin{aligned}
x_t^p &= At + B\\
&= \frac{1}{6}t - \frac{7}{72},
\end{aligned}$$

y la solución general

$$\begin{aligned}
x_t &= x_t^h + x_t^p\\
&= c_1 \cdot (-3)^t + c_2 \cdot (-2)^t + \frac{1}{6}t - \frac{7}{72}
\end{aligned}$$

2.2. $f(t)$ Función exponencial

2.2.1. Ejemplo 1

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 3 \cdot 2^t$$

Solución

Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = 0 \tag{7}$$

. Construimos el polinomio característico y lo igualamos a 0

$$\begin{aligned}
m^2 - 2m + 1 &= 0\\
(m-1)(m-1) &= 0\\
m_1 = m_2 &= 1
\end{aligned}$$

La solución de la parte homogénea es

$$\begin{aligned}
x_t^h &= c_1 \cdot 1^t + c_2 \cdot t \cdot 1^t\\
&= c_1 + c_2 \cdot t
\end{aligned}$$

Ahora debemos proponer la solución para la solución particular; debido a que $f(t) = 3 \cdot 2^t$, la solución particular debe tener la forma de una constante multiplicada por 2^t

$$\begin{aligned}
x_t^p &= A \cdot 2^t\\
x_{t+1}^p &= A \cdot 2^{t+1} = A \cdot 2^t \cdot 2^1 = 2A \cdot 2^t\\
x_{t+2}^p &= A \cdot 2^{t+2} = A \cdot 2^t \cdot 2^2 = 4A \cdot 2^t
\end{aligned}$$

Reemplazamos los resultados anteriores en la ec.(7)

$$\begin{aligned} x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t &= 4A \cdot 2^t - 2 \cdot 2A \cdot 2^t + A \cdot 2^t \\ &= (4A - 4A + A)2^t \\ &= A \cdot 2^t \\ &= 3 \cdot 2^t \end{aligned}$$

Podemos concluir que $A = 3$ y que la solución particular es

$$x_t^p = 3 \cdot 2^t$$

(**¡CUIDADO!** En este caso la solución particular nos dio exactamente igual a $f(t)$, pero esto no es cierto en general.)
Ya podemos escribir la solución general

$$\begin{aligned} x_t &= x_t^h + x_t^p \\ &= c_1 + c_2 \cdot t + 3 \cdot 2^t \end{aligned}$$

2.3. Algún término de $f(t)$ está en la solución homogénea

En el caso que esto suceda la parte de la función $f(t)$ que se repita se debe multiplicar por t. Vamos a aclarar esto con un ejemplo.

2.3.1. Ejemplo 1

Supongamos que deseamos resolver la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 5$$

Resolvemos la ecuación homogénea (usando el polinomio característico)

$$\begin{aligned} m^2 - 4m + 3 &= 0 \\ (m-1)(m-3) &= 0 \\ m_1 = 1, m_2 &= 3 \\ x_t^h = c_1 \cdot (1)^t + c_2 \cdot (3)^t = c_1 + c_2 \cdot (3)^t \end{aligned}$$

Debido a que $f(t) = 5$ (una constante), la forma de la solución particular debe ser $x_t^p = A$, pero en la solución de la ecuación homogénea ya tenemos un término con esta forma (c_1 es una constante), por lo tanto debemos modificar la propuesta para la solución particular (multiplicamos por t)

$$\begin{aligned} x_t^p &= A \cdot t \\ x_{t+1}^p &= A(t+1) = At + A \\ x_{t+2}^p &= A(t+2) = At + 2A \end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación inicial para encontrar el valor de A

$$\begin{aligned} x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t &= 5 \\ At + 2A - 4(At + A) + 3At &= 5 \\ At + 2A - 4At - 4A + 3At &= 5 \\ -2A &= 5 \\ A &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

La solución particular será

$$x_t^p = -\frac{5}{2}t,$$

y la solución general

$$\begin{aligned} x_t &= x_t^h + x_t^p \\ &= c_1 + c_2 \cdot (3)^t - \frac{5}{2}t \end{aligned}$$

2.3.2. Ejemplo 2

Vamos a solucionar el mismo ejemplo anterior cambiando $f(t)$

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 4 \cdot 3^t$$

Sabemos que la solución de la ecuación homogénea es

$$x_t^h = c_1 + c_2 \cdot (3)^t.$$

Dado que $f(t) = 4 \cdot 3^t$ la solución particular debe tener la forma $x_t^p = A \cdot (3)^t$, pero en la solución homogénea tenemos un término con esta forma($c_2 \cdot (3)^t$), por lo tanto debemos multiplicar la propuesta de solución particular por una t

$$\begin{aligned} x_t^p &= At \cdot (3)^t \\ x_{t+1}^p &= A(t+1) \cdot (3)^{t+1} \\ &= (At + A) \cdot (3^t 3^1) \\ &= 3At3^t + 3A3^t \\ x_{t+2}^p &= A(t+2) \cdot (3)^{t+2} \\ &= (At + 2A) \cdot (3^t 3^2) \\ &= 9At3^t + 18A3^t \end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuación inicial para hallar el valor de A

$$\begin{aligned} x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t &= 4 \cdot 3^t \\ 9At3^t + 18A3^t - 4(3At3^t + 3A3^t) + 3(At3^t) &= 4 \cdot 3^t \\ 9At3^t + 18A3^t - 12At3^t - 12A3^t + 3At3^t &= 4 \cdot 3^t \\ 6At3^t &= 4 \cdot 3^t \\ A &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La solución particular es

$$x_t^p = \frac{2}{3}t(3)^t,$$

por lo tanto la solución general es

$$\begin{aligned} x_t &= x_t^h + x_t^p \\ &= c_1 + c_2 \cdot (3)^t + \frac{2}{3}t(3)^t \end{aligned}$$

2.3.3. Ejemplo 3. Encontrar c_1 y c_2

Sabemos del ejemplo anterior que la solución de la ecuación en diferencias

$$x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 4 \cdot 3^t$$

es

$$x_t = c_1 + c_2 \cdot (3)^t + \frac{2}{3}t(3)^t.$$

Nos podrían dar información de x_t para dos valores arbitrarios de t, pero generalmente son x_0 y x_1, en este ejemplo vamos a tomar

$$x_0 = 1, x_1 = 2$$

Lo que debemos hacer es reemplazar $t = 0$ y luego $t = 1$ en la solución para encontrar un sistema de ecuaciones para c_1 y c_2, que se puede resolver por alguno de los métodos que el lector debe conocer (sustitución, igualación, eliminación, Cramer, Gauss-Jordan), pero generalmente se usa sustitución

$$\begin{aligned}
x_0 &= c_1 + c_2 \cdot (3)^0 + \frac{2}{3}0(3)^0 \\
&= c_1 + c_2 \\
&= 1 \\
x_1 &= c_1 + c_2 \cdot (3)^1 + \frac{2}{3}1(3)^1 \\
&= c_1 + 3c_2 + 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones que debemos resolver es

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 1 \\
c_1 + 3c_2 + 2 &= 2
\end{aligned}$$

y las soluciones son

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{3}{2} \\
c_2 &= -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

por lo tanto la solución

$$x_t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot (3)^t + \frac{2}{3}t(3)^t.$$

3. Ecuaciones de orden superior

El procedimiento para resolver estas ecuaciones es el mismo que se describió en la sec.(2), lo que va a cambiar es que el número de raíces del polinomio característico es igual al grado de la ecuación en diferencias

3.1. Ejemplo 1

Solucione la ecuación en diferencias

$$x_{t+3} - 3x_{t+1} + 2x_t = 2(3)^t$$

Solución
Iniciamos resolviendo la ecuación homogénea

$$x_{t+3} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0.$$

Encontramos el polinomio característico y lo igualamos a 0

$$m^3 - 3m + 2 = 0$$

La factorización de el polinomio puede ser difícil de llevar a cabo, por esto generalmente los profesores nos dan dicha factorización (el camino más rápido para realizar la factorización es usar el **Teorema del factor**). En este caso la factorización es la siguiente

$$(m-1)^2(m+2) = 0.$$

Lo que nos lleva a $m_1 = m_2 = 1, m_3 = -2$, por lo tanto la solución homogénea es

$$\begin{aligned} x_t^h &= c_1(1)^t + c_2t(1)^t + c_3(-2)^t \\ &= c_1 + c_2t + c_3(-2)^t \end{aligned}$$

Ahora proponemos la solución particular basados en $f(t) = 2(3)^t$

$$\begin{aligned} x_t^p &= A(3)^t \\ x_{t+1}^p &= A(3)^{t+1} = A(3^t3^1) = 3A3^t \\ x_{t+2}^p &= A(3)^{t+2} = A(3^t3^2) = 9A3^t \\ x_{t+3}^p &= A(3)^{t+3} = A(3^t3^3) = 27A3^t \end{aligned}$$

No había necesidad de calcular x_{t+2}^p, debido a que no aparece en la ecuación en diferencias; tampoco tuvimos que multiplicar por t, porque 3^t no aparece en la solución homogénea. Ahora reemplazamos los resultados anteriores en la ecuación

$$\begin{aligned} x_{t+3} - 3x_{t+1} + 2x_t &= 2(3)^t \\ 27A3^t - 3(3A3^t) + 2(A(3)^t) &= 2(3)^t \\ 27A3^t - 9A3^t + 2A3^t &= 2(3)^t \\ 20A(3)^t &= 2(3)^t \\ \Rightarrow 20A &= 2 \\ A &= \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Entonces $x_t^p = \frac{1}{10}(3)^t$ y la solución general

$$\begin{aligned} x_t &= x_t^h + x_t^p \\ &= c_1 + c_2t + c_3(-2)^t + \frac{1}{10}(3)^t \end{aligned}$$

NOTA: La distribución de este material es completamente gratuita
Puedes encontrar la versión mas reciente de este documento en https://www.madmath.co/repasos